ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
Etablissement d'enseignement supérieur privé soutenu par la Chambre de Commerce et d'Industrie de l'Oise
6, avenue Thiers - 60200 Compiègne - Tél 44 40 29 32

CONCOURS D'ADMISSION 1987

MATHEMATIQUES II

Lundi 1er Juin 1987 de 13H00 à 16H00

Options :
- Générale
- Technologique
- Economique

Coefficients :
- Générale 4
- Technologique 4
- Economique 3

PROBLEME I

L'objet de ce problème est l'étude d'un jeu de dés.

Les trois parties sont largement indépendantes.

NOTATIONS :

1°. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

Les fonctions numériques f_1 et f_2 de la variable réelle x, sont définies par :

$$f_1(x) = 4 \cdot 5^x - 2 \cdot 4^x$$

et $$f_2(x) = 6^x$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives correspondantes.

2°. La suite réelle u est définie par :

$$u_0 = u_1 = 0$$

et pour $n \in \mathbb{N}$, la relation récurrente :

$$18 \cdot u_{n+2} - 27 \cdot u_{n+1} + 10 \cdot u_n = 1$$

et les suites réelles v et w par :

$$n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3 \cdot u_{n+1} - 2 \cdot u_n - 1$$

$$w_n = 6 \cdot u_{n+1} - 5 \cdot u_n - 1$$

3°. Si M et N sont des évènements, on note :

$\bar{M}$: l'évènement contraire de M

P(M) : la probabilité que l'évènement M se réalise

$P_N(M)$: la probabilité conditionnelle de M sachant N

4°. Le jeu : On dispose d'un dé supposé parfait.

Pour n lancers du dé ($n \in \mathbb{N}^*$), on note les évènements suivants :

A_n : obtenir au moins un as

B_n : obtenir au moins un 6

G_n : gagner

(On gagne, si au cours des n lancers, on a obtenu au moins un as et au moins un 6).

PARTIE 1

1°- Etudier les variations de f_1 et f_2.

2°- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ avec les axes x'x et y'y.

3°- Représenter dans le même repère, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en mettant en évidence la position relative de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (on ne demande pas de déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$).

4°- Le graphique permet de montrer l'existence et l'unicité du plus petit entier naturel n_0 tel que : $f_1(n_0) \leqslant f_2(n_0)$.

Donner n_0.

Tournez la page S. V. P.

ECOLE SUPERIEURE de COMMERCE de COMPIEGNE
commune-Math 2
page 301
1987

PARTIE 2

1°- Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

2°- Démontrer l'unicité de u.

3°- Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

En déduire que v est une suite géométrique. On donnera le premier terme v_0 et la raison q'.

4°- Calculer w_{n+1} en fonction de w_n.

En déduire que w est une suite géométrique. On donnera le premier terme w_0 et la raison q" .

5°- Déduire de ce qui précède l'expression de u_n en fonction de n.

PARTIE 3

1°- Calculer $P(G_1)$, $P(G_2)$, et $P(G_3)$.

2°- Que représentent les évènements suivants :

$A_n \cap B_n$, $\bar{A}_n \cap B_n$, $A_n \cap \bar{B}_n$ et $\bar{A}_n \cap \bar{B}_n$?

Calculer leurs probabilités.

3°- Calculer les probabilités conditionnelles :

$P_{G_n}(G_{n+1})$; $P_{\bar{A}_n \cap B_n}(G_{n+1})$

$P_{A_n \cap \bar{B}_n}(G_{n+1})$; $P_{\bar{A}_n \cap \bar{B}_n}(G_{n+1})$

4°- Exprimer $P(G_{n+1})$ en fonction des probabilités conditionnelles précédentes.

5°- Déterminer entre $P(G_{n+2})$, $P(G_{n+1})$ et $P(G_n)$ une relation de récurrence.

6°- Déterminer le nombre minimum n_0 de dés à lancer pour que :

$$P(G_{n_0}) \geqslant \frac{1}{2}$$

PROBLEME II

La durée d'une communication téléphonique à grande distance est assimilée à une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est définie par les formules :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ F(x) = 1 - \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1°- Déterminer la densité de la loi de X.

2°- Calculer les moments d'ordre 1 et 2 et l'écart-type de X.

3°- Calculer les probabilités $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$ et $P(X \leqslant 9 / X \geqslant 5)$.

4°- A des fins statistiques, une société décide de comptabiliser le nombre de communications dont la durée est comprise entre 3 et 9 unités, parmi 5000 appels.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de communications exclues du sondage.

Quelle est la loi suivie par Y ?

Calculer E(Y) et V(Y).

A l'aide d'une approximation convenable, calculer la probabilité pour que Y soit inférieure à 2000.

5°- Le prix moyen d'une communication dont la durée est comprise entre 3 et 9 unités coute 57 F à la société, qui facture ses abonnés suivant la loi définie par la variable aléatoire

$$Z = \frac{5000 \cdot 57}{5000 - Y}$$

En approximant Z par un développement limité, calculer l'espérance et l'écart-type de Z.

(On donnera les valeurs numériques à 10^{-3} près)